

三角格子上の臨界パーコレーションの共形不変性

カーディエとスミルノフ

田崎清明

「三角格子の目にデタラメに白黒の碁石を並べる」というゲームのような設定で、臨界点での連結確率が共形不変性を示す — 2001年にスミルノフが証明したこの驚くべき結果を、予備知識を仮定せず丁寧に解説する。数理物理学の近年の話題の一つだが、じっくり読めば初学者でも問題設定と主要結果は完全に理解できるはずだし、証明の概略も垣間見ることができるだろう。

ただし、これを読むには「正則関数」という概念を知っている必要がある。大学一年生や高校生には馴染みがないだろうから、必要最低限の定義を書いておこう*1)。複素関数（複素数を別の複素数に写す関数） $f(z)$ の微分を定義したい。 $|\eta|=1$ を満たす任意の複素数 η をとり、正の実数 ε を使って、

$$f'_\eta(z) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(z + \varepsilon\eta) - f(z)}{\varepsilon\eta} \quad (1)$$

とすれば、 z を η 方向にずらした際の微分になっている。一般には $f'_\eta(z)$ は η に依存するが、特に $f(z)$ の性質がよく、 $f'_\eta(z)$ が η によらないとき、 $f(z)$ は z で微分可能という。開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の全ての点で微分可能な関数 $f(z)$ を、 Ω 上の正則関数（あるいは共形変換）と呼ぶ。正則関数は様々な美しい性質をもっており、それを調べるのが複素関数論である。

*1) 複素関数論をじっくりと学べば、ここで解説する結果の深さをさらに実感できるだろう。

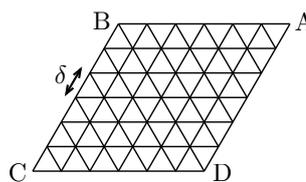


図1 ひし形を格子間隔 δ の三角格子に分割した「盤」の上でパーコレーションを考える。

1. ボードゲーム「ヘックス」とパーコレーション

一辺の長さが1のひし形ABCDを、一辺が $\delta = 1/6$ の正三角形で分割し、三角格子とみなす(図1)。線が交わる点を格子点と呼ぶ。

ヘックスというゲームがある。1940年代に、ニールス・ボーア研究所にいた数学者ピート・ハインと、“A Beautiful Mind”のモデルとしても有名なジョン・ナッシュが独立に考案したボードゲームだ。二人のプレイヤーは、図1の「盤」の格子点に、それぞれ●と○の碁石を交互に一つずつ置いていく。ここで、●のプレイヤーは、●の碁石によって辺ABと辺CDを結ぶ連結した道を作ることを目指す*2)。○のプレイヤーは、○の碁石で辺BCとDAを結ぶことを目指す。

図2は二人が全ての碁石を打ち終わって、●が勝った状況である。辺ABと辺CDの間には●の道が通じているが、辺BCとDAの間の○の道はない。実は、このゲームには決して「引き分け」

*2) 距離 δ だけ離れた格子点を連結しているとみなす。

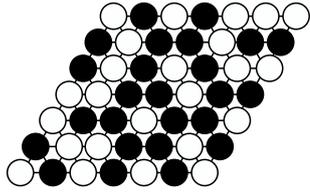


図2 ヘックスの最終局面、あるいはパーコレーションのパターン。ABとCDを結ぶ●の道ができています。

がないことが、次の「ヘックスの基本定理^{*3)}」によって保証されている。

定理：盤の全ての格子点に（必ずしも個数の等しくない）●と○を任意に並べたパターンにおいて、「ABとCDを結ぶ●の道がある」と「BCとDAを結ぶ○の道がある」の内的一方が必ず成立する。

ヘックスのボードを使って、確率論の問題を考えよう。プレイヤーが戦略的に基石を置くかわりに、サイコロを投げてデタラメに基石を並べていくのだ。モデルの唯一のパラメーターである p （ただし $0 \leq p \leq 1$ ）を選んだら、各々の格子点に、互いに独立に、確率 p で●を置き、確率 $1-p$ で○を置いていく。そうやって全ての格子点に基石を置いたあとで「●が勝つ確率」つまり、「辺AB（の少なくとも一点）と辺CD（の少なくとも一点）を結ぶような●の連結した道が存在する確率」を $f_\delta(p)$ と書く。三角格子の格子間隔 δ が小さくなる時（つまり、格子点の個数が多くなる時）の確率 $f_\delta(p)$ のふるまいに関心がある。

もし p が十分に小さければ、ほとんどの格子点に○が置かれ、○の「海」の中に少しだけ●の「島」が散らばった状況になるだろう。そうなると、ABとCDを結ぶ●の道が存在するとは考えにくい。特に、 δ が小さくなっていけば、ABとCDを結ぶのにたくさんの基石が必要になり、道を作るのはますます困難になっていくだろう。実際、 $p < 1/2$ を満たす任意の p について、 $\delta \downarrow 0$ のとき $f_\delta(p) \downarrow 0$ となることが証明されている。格子点の数が増えれば、●は確実に「負ける」のだ。

*3) 証明も難しくない。絵を描いてみれば納得できるだろう。

反対に p が十分に1に近ければ、全て逆転し、●の「海」に、○が散らばっている。よほど運が悪くない限りABとCDを結ぶ●の道が存在するはずだ。実際、 $p > 1/2$ を満たす任意の p について、 $\delta \downarrow 0$ のとき $f_\delta(p) \uparrow 1$ となることが証明されている。格子点の数が増えれば、●は確実に「勝つ」。

p が $1/2$ より大きい小さいかで $f_\delta(p)$ のふるまいが劇的に変わるのは相転移現象の一例である。そして、二つの「相」を隔てる臨界点の $p = 1/2$ は想像を絶する豊かな性質をもっているのだ。

$p = 1/2$ では δ によらず $f_\delta(1/2) = 1/2$ となる。この事実は下で導く双対性の等式 $f_\delta(p) + f_\delta(1-p) = 1$ で $p = 1/2$ とすれば直ちに示される。臨界点では勝ち負けの確率はちょうど五分五分なのだ。「格子間隔が変わって格子点の数変化しても連結確率が変わらない」というスケール不変性が見られることに注目しよう。

双対性はヘックスの基本定理の簡単な帰結だ。まず、二つの事象が排他的に生じるから、[●がABとCDを結ぶ確率] + [○がBCとDAを結ぶ確率] = 1 が言える。左辺の一つ目の確率は $f_\delta(p)$ だ。二つ目について考えよう。図3左に○がBCとDAを結んだ局面を描いた。この図を右に60度回転し、左右反転し、白と黒を反転したのが右図である。先ほどの○の道は、ABとCDを結ぶ●の道に変換されている。ある格子点に●を置く確率は p 、○を置く確率は $1-p$ だった。よって、ここでの [○がBCとDAを結ぶ確率] は、確率を $1-p$ に変えたモデルでの [●がABとCDを結ぶ確率]、つまり、 $f_\delta(1-p)$ に等しいことになる。はじめの等式に戻せば、双対性の等式 $f_\delta(p) + f_\delta(1-p) = 1$ が得られる。双対性は、 p が小さい領域と p が1に近い領域を正確に対応づける興味深い関係である。

2. 連結確率の共形不変性

臨界点 $p = 1/2$ での三角格子上のパーコレーションは、単なるスケール不変性を越えた、驚くべき不変性をもっている。以下、正確に述べよう。

話の舞台である2次元平面を複素平面 \mathbb{C} として

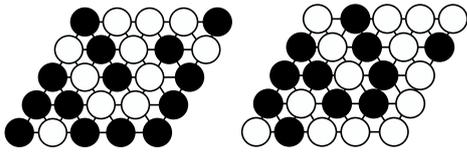


図3 双対性の要の図。○が勝った局面(左)を回転、反転、左右反転すると、●が勝った局面(右)になる。

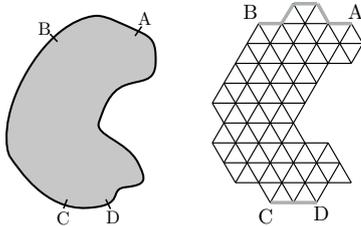


図4 2次元の領域Omegaと境界上の四つの点(左)。対応する三角格子Omega_delta(右)。

表現する。 δ を任意の正の実数とし、 Λ_δ を格子間隔が δ の無限に大きな三角格子(の格子点の集合)としよう。あえて式で書けば、

$$\Lambda_\delta := \{j\delta + k\tau\delta \mid j, k \in \mathbb{Z}\} \quad (2)$$

である。ここで、

$$\tau := \exp\left[\frac{2\pi}{3}i\right] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (3)$$

という、実軸と120度の角をなす単位ベクトル(大きさ1の複素数)を定義しておく。面白いことに、スミルノフの理論では、純虚数 i ではなく、この τ が複素数を表現する「単位」の役割を果たす。

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を任意の有界で単連結な開集合とし、 $\partial\Omega$ をその境界とする。 $\partial\Omega$ 上に任意の四点A, B, C, Dを、左回りにこの順番に並ぶように、とる(図4左)。三角格子 Λ_δ から Ω の内側に入っている部分を切り出したものを Ω_δ とする。 Ω_δ の境界の格子点で、A, B, C, Dに最も近いものを(記号を流用して)それぞれA, B, C, Dと呼ぶ(図4右)。 Ω_δ の境界に沿ってAからBに向かって左回りにとった弧を \widehat{AB} と書く*4)。同様に、 \widehat{CD} をCとDを結ぶ弧とする(\widehat{AB} と \widehat{CD} を図4右で太い灰色

*4) 今後も、「弧」というときには、境界上の二点を、左回りに結ぶような境界の一部分を意味することにする。

で示した)。

ここでパーコレーションの問題を考える。臨界点に関心があるので、最初から $p = 1/2$ としよう。 Ω_δ の各々の格子点に、独立に、確率 $1/2$ で●の基石、確率 $1/2$ で○の基石を置いていく。全ての格子点に基石を置いたとき、弧 \widehat{AB} と弧 \widehat{CD} を結ぶ(連結した)●の道が存在する確率を $f_\delta(\Omega; A, B, C, D)$ と書く。 Ω をひし形に取り、A, B, C, Dを頂点とすれば、これは上の $f_\delta(1/2)$ そのものである。

連続極限における連結確率を

$$f(\Omega; A, B, C, D) := \lim_{\delta \downarrow 0} f_\delta(\Omega; A, B, C, D) \quad (4)$$

によって定義する(極限の存在は証明されている)。図4左の図形はそのままにして、右図での格子の刻み δ をどんどん細かくしていこうというのだ。

以下の定理は連結確率 $f(\Omega; A, B, C, D)$ が驚くべき不変性を持っていることを示す。

定理1: 集合 Ω とその境界上の点A, B, C, Dを上述のようにとる。 $\Omega' \subset \mathbb{C}$ を任意の有界で単連結な開集合、 $\Phi: \Omega \rightarrow \Omega'$ を任意の一対一の正則関数とし、 $A' = \Phi(A)$, $B' = \Phi(B)$, $C' = \Phi(C)$, $D' = \Phi(D)$ と書く。このとき

$$f(\Omega; A, B, C, D) = f(\Omega'; A', B', C', D') \quad (5)$$

が成り立つ。

連結確率 $f(\Omega; A, B, C, D)$ は任意の正則関数(共形変換)について不変なのである。2次元のパーコレーションの臨界点の共形不変性は様々な形で予想されていたが、上の美しい定理を最初に証明したのはスミルノフ¹⁾である。

スミルノフの仕事も、広い意味では、SLEや共形場の理論の研究の近年の大きな流れの中にあると考えるべきなのだろうが、彼の証明にはそういった「飛び道具」はいっさい登場しない。2次元パーコレーションの臨界点についての前世代までの堅実な蓄積をフルに活用し、さらに、三角格子パーコレーションの臨界点では後述する(11)という信じがたい対称性が成り立つことを絶妙な確率論的な議論で証明し、それが理論の共形不変性と本質的

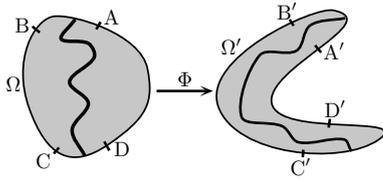


図5 連結確率の共形不変性。弧 \widehat{AB} と弧 \widehat{CD} が結ばれる確率は、弧 $\widehat{A'B'}$ と弧 $\widehat{C'D'}$ が結ばれる確率と等しい。

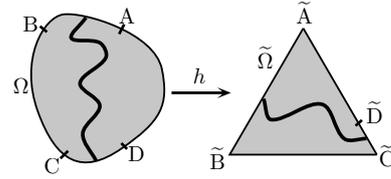


図6 領域 Ω を一辺が1の正三角形 $\tilde{\Omega}$ に写せば連結確率は単に \tilde{C} と \tilde{D} の距離になる！

に関わることを示したのである。「壮大な建築物」というタイプとは正反対の、鋭利な刃物で問題の核心を一瞬にして貫くような美しく非凡な（そして学んだ者の心に残る）業績である。

共形不変性は自明とはほど遠い事を強調しておこう。最も簡単な場合として、 $\Omega = \Omega'$ が円盤状の領域で、 Φ が単なる回転だとしよう。このとき(5)は連結確率が回転不変であることを表している。もともとのパーコレーションは三角格子の上に定義されていたのだから、 δ が有限のときには、連結確率は三角格子特有の異方性を示す。ところが、連続極限ではそのような格子の方向が「見えなく」なって回転対称性が完全に回復するというのだ。これだけでも十分に非自明である。

だが、(5)は遙かにすさまじい内容を含んでいる(図5)。 Ω と Ω' は有界で単連結な開集合なら何でもかまわないし Φ も全く任意の正則関数だ。好き勝手な正則関数で Ω を「ぐによーつ」と曲げてしまっても、対応する弧をとれば、連結確率は全く変わらないというのだ*5)。何らかの「直観」で理解できるような話ではない！

黒と白の碁石を半々にランダムに置いていくだけで、このような対称性をもった関数が定義されてしまう。臨界現象はわれわれの想像を絶する非自明な数理を生み出しうるのだ。

*5) 言うまでもないが、三角格子まで「ぐによーつ」と曲げるわけではない（三角格子まで変換するなら不変性は自明）。まっすぐな三角格子(2)から Ω' の内側に入る部分を切り出して、そこでパーコレーションの問題を考えるのだ。

3. カーディーの表式

スミルノフ¹⁾は、上の定理1よりも強力な以下の結果を示している。

定理2: 定理1と同様に、集合 Ω とその境界上の点 A, B, C, D をとる。一辺の長さが1の正三角形を考え、その頂点を(左回りに) $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ とし、その内部の領域を $\tilde{\Omega}$ とする。複素関数論の基本的な結果によれば、 $h(A) = \tilde{A}, h(B) = \tilde{B}, h(C) = \tilde{C}$ を満たす一対一の正則関数 $h: \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ が存在し一意である(図6)。よって正三角形の边上の点 $\tilde{D} = h(D)$ が一意に決まる。このとき、

$$f(\Omega; A, B, C, D) = (\tilde{C} \text{ と } \tilde{D} \text{ の距離}) \quad (6)$$

が成り立つ。

$\partial\Omega$ 上の四点の内の三つをちょうど正三角形の頂点に写してやれば、連結確率は単に二点間の距離で表されるというのだ。何と簡明な！(6)は長方形での連結確率についてカーディーが共形場の理論を使って導いた予想²⁾をカレルソンが書き直した表式である。上の h が具体的に計算できるような Ω と A, B, C, D については、連結確率 $f(\Omega; A, B, C, D)$ が正確に計算できることになる。

定理2が得られれば、定理1は簡単に示される。定理1の状況において $h' = h \circ \Phi^{-1}$ とすれば、これは Ω' を正三角形 $\tilde{\Omega}$ に写す正則関数になっている。もちろん四つの点 A', B', C', D' は $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ に写されるので、(6)により、連結確率 $f(\Omega'; A', B', C', D')$ は \tilde{C} と \tilde{D} の距離に等しい。よって(5)が成り立つ。

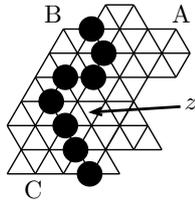


図7 事象 $E_{A;B,C}(z)$ が真になるようなパターン (肝心の●だけを描いた)。

4. 写像 h の構成

スミルノフによる定理2の証明の基本的なアイデアを見よう。核心となるのは Ω から正三角形 $\tilde{\Omega}$ への正則関数 h である。定理2で述べたように、正則関数 h の存在は複素関数論の一般論の帰結だが、それだけでは h の具体形も連結確率との関係も全く分からない。驚くべきことに、スミルノフは、**絶妙な事象の確率を用いて h を具体的に構成してしまうのだ。**

定理1と同様の Ω をとり、境界 $\partial\Omega$ 上に左回りに配置した三点 A, B, C を任意に選んで固定する。ここで四点目の D が登場しないのが極めて巧みなところだと後で分かる。再び三角格子 Ω_δ をとり、いずれかの (一辺が δ の) 三角形の中心 z について $E_{A;B,C}(z)$ を「●の道によって A, z と B, C が分離される*6) という事象としよう (図7)。事象 $E_{A;B,C}(z)$ の確率を考え、 $\delta \downarrow 0$ の極限をとったものを $h_{A;B,C}(z)$ とする。

事象 $E_{A;B,C}(z)$ についての簡単な考察から、(i) $h_{A;B,C}(A) = 1$ であること、(ii) z が弧 \widehat{BC} の上にあるなら $h_{A;B,C}(z) = 0$ であることが示される (どちらも絵を描けば、大ざっぱな雰囲気は納得できると思う)。

A, B, C の役割を順に入れ替えることで、 $h_{B;C,A}(z)$ と $h_{C;A,B}(z)$ を定義する。そして、

*6) より正確に言えば、「●の連結した道があり、それを取り除くと Ω_δ は二つの部分に分かれ、その一方に A と z があり、他方に B と C がある」ということ。

$$h(z) = \frac{h_{A;B,C}(z) + \tau h_{B;C,A}(z) + \tau^2 h_{C;A,B}(z)}{\sqrt{3}} \quad (7)$$

$$s(z) = h_{A;B,C}(z) + h_{B;C,A}(z) + h_{C;A,B}(z) \quad (8)$$

により複素関数 $h(z)$ と実関数 $s(z)$ を定義する。ここで τ は (3) で定義した「単位ベクトル」である。複素関数を定義するのに二つの実関数を $f(x) + ig(x)$ のように足し合わせるのが普通だが、ここでは三つの実関数と τ を使っている。これも理論の核心に関わる点である。

これらの関数についての次の事実が本質的である。証明のアイデアは次節で述べる。

補題1: $h(z)$ は Ω 上で正則である。 $s(z)$ は Ω 上で一定値1をとる。

以上の結果を認めれば、半ば機械的な評価によって、定理2が得られる。

上の(ii)より $h_{B;C,A}(A) = h_{C;A,B}(A) = 0$ だから、(i)とあわせて $h(A) = 1/\sqrt{3}$ である。同様にして、 $h(B) = \tau/\sqrt{3}$, $h(C) = \tau^2/\sqrt{3}$ もいえる。これら三点 $h(A), h(B), h(C)$ は一辺の長さが1の正三角形の頂点をなしている。

さらに、 z を弧 \widehat{BC} の上にとると(ii)より $h(z) = \{\tau h_{B;C,A}(z) + \tau^2 h_{C;A,B}(z)\}/\sqrt{3}$ である。 $s(z) = 1$ と(ii)から $h_{B;C,A}(z) + h_{C;A,B}(z) = 1$ だから、上の $h(z)$ は $h(B)$ と $h(C)$ を結ぶ線分上にあることが分かる。同じ考察は他の弧と線分についても成り立つ。結局、 $h(z)$ は領域 Ω を一辺が1の正三角形の内部に写す正則関数である。

連結確率については、事象 $E_{A;B,C}(z)$ の定義より

$$f(\Omega; A, B, C, D) = h_{A;B,C}(D) \quad (9)$$

となっている。 D は弧 \widehat{CA} 上にあるから、(ii)より $h_{B;C,A}(D) = 0$ であり、 $s(z) = 1$ から $h_{A;B,C}(D) + h_{C;A,B}(D) = 1$ である。以上を全てあわせれば、

$$f(\Omega; A, B, C, D) = \frac{\sqrt{3}h(D) - \tau^2}{1 - \tau^2} \quad (10)$$

となり、右辺は $h(C)$ と $h(D)$ の距離である。

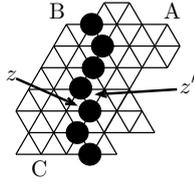


図 8 事象 $E_{A;B,C}(z')$ が真、事象 $E_{A;B,C}(z)$ が偽になるパターン。

5. スミルノフの $2\pi/3$ 対称性

スミルノフの理論の核心は $h(z)$ の正則性についての補題 1 である。証明の中心になる確率論的アイデアを述べる余裕はないが、どういう方向で証明が進むのかを大ざっぱに見ておこう。

領域 Ω とそれを三角格子に分割した Ω_δ を考える。 z, z' をそれぞれ格子の中の三角形の中点とする。 $P_{A;B,C}(z, z')$ を、「事象 $E_{A;B,C}(z')$ が真で、かつ、事象 $E_{A;B,C}(z)$ が偽である」確率としよう。

補題 2 : z を三角格子 Ω_δ の一つの三角形の中点とし、 $z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ がそれぞれ隣接する三角形の中点となるように $\eta \in \mathbb{C}$ をとる (よって $|\eta| = 1/\sqrt{3}$)。任意の $\delta > 0$ と任意の A, B, C、そして上の条件を満たす任意の z と η について、

$$\begin{aligned} P_{A;B,C}(z, z + \eta) &= P_{B;C,A}(z, z + \tau\eta) \\ &= P_{C;A,B}(z, z + \tau^2\eta) \end{aligned} \quad (11)$$

が成り立つ。

$z + \eta, z + \tau\eta, z + \tau^2\eta$ は z の最隣接点で、 z を中心に 120 度ずつ「回って」いる。それと連動して、三つの境界の点 A, B, C も順次入れ替わっている。こういう「回転」に対して確率 $P_{A;B,C}(z, z')$ は不変だというのだ。私は初めてこの補題 2 をみたときは「ただし領域が 120 度回転について不変で A, B, C も …」といった対称性の条件がどこかに付いているのだろうと思った。しかし、おそるべきことに、実際には補題 2 は任意のいびつな形の領域について成り立つのだ！ スミルノフによる補題 2 の証明はたったの 15 行。もちろん解説するには (図を描いて) 時間をかける必要があるが、決して大仰な証明ではない。絶妙の場合分けをして、

1 節にも登場した「白黒反転」の技術を (より高級に) 用いるだけである。

(11) のような対称性が存在するという事実だけでも驚きだが、もちろん、真に素晴らしいのはこれが関数 $h(z)$ の正則性と深く結びつくということだ。 $h_{A;B,C}(z)$ が事象 $E_{A;B,C}(z)$ の確率だったので、(11) から、 $h_{A;B,C}(z + \eta) - h_{A;B,C}(z) \simeq h_{B;C,A}(z + \tau\eta) - h_{B;C,A}(z) \simeq h_{C;A,B}(z + \tau^2\eta) - h_{C;A,B}(z)$ という対称性が示される*7)。これを、 $h(z)$ の定義に代入すると、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\eta} \{h(z + \eta) - h(z)\} \\ &\simeq \frac{1}{\tau\eta} \{h(z + \tau\eta) - h(z)\} \\ &\simeq \frac{1}{\tau^2\eta} \{h(z + \tau^2\eta) - h(z)\} \end{aligned} \quad (12)$$

という関係が得られる。(1) と比べると、これが「 $h(z)$ を $\eta, \tau\eta, \tau^2\eta$ の三つの方向で微分した結果が等しい」ことを意味しているのが分かるだろう。**通常のコーシー・リーマン関係式では実数方向と虚数方向の二種類の微分を考えるが、ここでは複素平面内で互いに 120 度の角をなす三つの方向についての微分が等しいことをみている。**(12) があれば、補題 1 を示すのは技術的な問題である。

最後に証明の流れをざっと振り返っておこう。本来の問題設定では境界上に四点 A, B, C, D が与えられたが、スミルノフは敢えて A, B, C の三点を残し、残りの一点は領域内を自由に動く z で置き換えた。これによって、「120 度回転対称性」(11) が明瞭になる。特に、120 度構造を直接反映した「複素数単位」 τ によって定義した複素関数 $h(z)$ は、「120 度コーシー・リーマン関係式」(12) を満たすのである。このような「120 度回転対称性」は単なる技術的なものではなく、2 次元パーコレーションの臨界点に固有の深い性質の反映ではないかとも推測されている。

スミルノフの仕事を契機に三角格子パーコレー

*7) この節では、やや不正確な記法になるが、 $h_{A;B,C}(z), h(z)$ 等は全て有限の δ についての関数とする。 \simeq は $\delta \downarrow 0$ で等式になる関係を示す。

ションの臨界点についての理解は一気に深まり、その後は SLE_6 との関係をつるに利用した解析が進められている。そのような発展についてはより専門的な解説を待ちたい。

本稿に貴重なコメントをくださった香取眞理氏に感謝する。

参考文献

- 1) S. Smirnov, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **333**, 239–244 (2001). スミルノフの web page (<http://www.math.kth.se/~stas/>) の Recent Papers から入手可能。なお、スミルノフの論文は簡潔で難解だが、彼の議論をより分かりやすく改良した V. Beffara の講演録 *Cardy's formula on the triangular lattice, the easy way* が著者の web page (<http://www.umpa.ens-lyon.fr/~vbeffara/index.php>) で公開されている。
- 2) J. Cardy, J. Phys. A **25**, L201–L206 (1992)

(たぎき・はるあき, 学習院大学理学部)