

11-7. [低温展開の高次の計算] 11.5.2 節の計算を進めて、 $f(\beta, H)$ の低温展開を δ^{12} のオーダーまで計算し、やはり N が残らないことを確かめよ（本質的に難しくはないが計算の手間は大変）。

11-7 の解答： まず、ひたすら Z の展開 (11.5.6) への寄与を数え上げる。はじめは $m = 10$ について。まず二つの連結成分からなるグラフ。図の (a) と (b) が重ならないで現れるようなパターンは $2N(N - 8)$ 通り。よって寄与は $2N(N - 8)\kappa^3\delta^{10}$ である。次に、連結したグラフ。 2×3 の長方形を基本に変形した図形の形を数え上げると、 $N\{18\kappa^4 + 8\kappa^5 + 2\kappa^6\}\delta^{10}$ となる。

次に $m = 12$ について。まず、三つの連結成分からなるグラフ。図の (a) が三つ重ならないで現れるグラフの数は $(N/6)\{4(N - 8) + 4(N - 9) + (N - 13)(N - 10)\} = (N^3/6) - (5N^2/2) + (31N/3)$ である。展開への寄与は $\{(N^3/6) - (5N^2/2) + (31N/3)\}\kappa^3\delta^{12}$ である。

次に二つの連結成分。(a) と (c) からなるグラフからの寄与は $(N^2 - 12N)\kappa^5\delta^{12}$ 、(a) と (d) からなるグラフからの寄与は $(6N^2 - 62N)\kappa^4\delta^{12}$ である。さらに、二つの (b) からなるグラフからの寄与は $(2N^2 - 23N)\kappa^4\delta^{12}$ である。したがって、二つの連結成分からの寄与の合計は $(N^2 - 12N)\kappa^5\delta^{12} + (8N^2 - 85N)\kappa^4\delta^{12}$ となる。

最後は連結したグラフ。数が多いが、すべて足しあげると寄与は $N\{55\kappa^5 + 40\kappa^6 + 22\kappa^7 + 6\kappa^8 + \kappa^9\}\delta^{12}$ となる。

以上をすべて足しあげ、再び f_L の展開に書き直す。 $\log(1 + x) \simeq x - (x^2/2) + (x^3/3)$ を使って δ^{12} までの項をすべて整理すると、 N^3 、 N^2 のかかった項は完全にキャンセルする。(11.5.9) の $O(\delta^{10})$ は、 $\{-16\kappa^3 + 18\kappa^4 + 8\kappa^5 + 2\kappa^6\}\delta^{10} + \{(31/3)\kappa^3 - 85\kappa^4 + 43\kappa^5 + 40\kappa^6 + 22\kappa^7 + 6\kappa^8 + \kappa^9\}\delta^{12} + O(\delta^{14})$ となる。