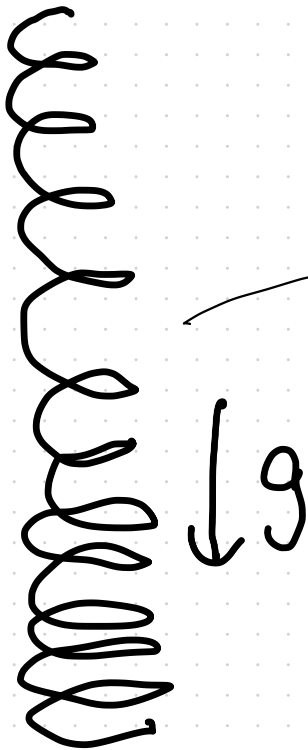
spring fall
バネで繋がれた粒子の落下運動

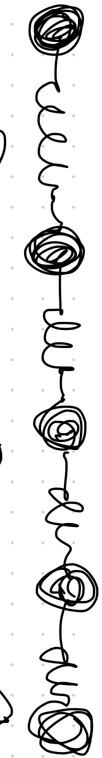
田崎 晴明

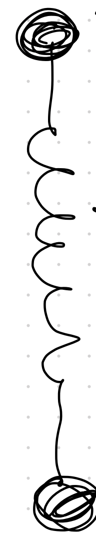
この解説では大学一年生程度の物理と数学の知識を仮定します。
言い忘れてますが、t は時刻を表す変数です。

もっとも簡単な問題



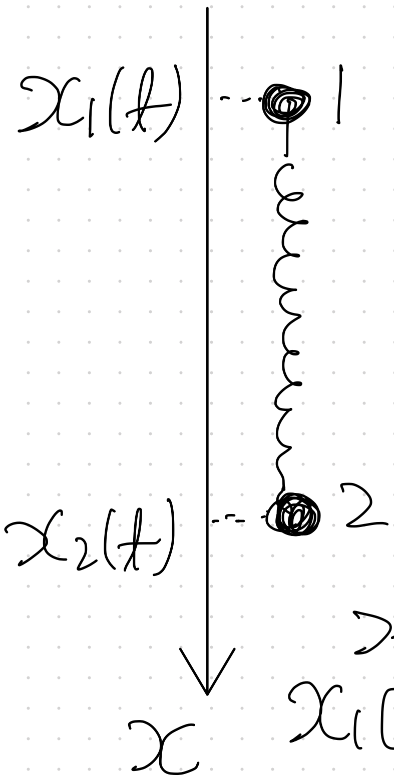
弾性
+
質量



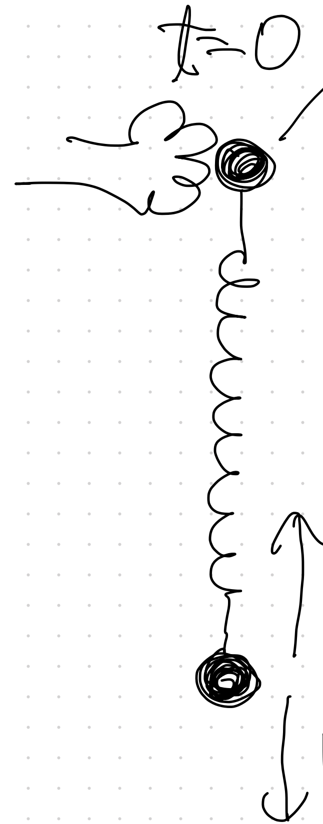


理想なバネ
質量ゼロ
自然長 l_0
バネ定数 k

座標と初期状態



つねに $x_1(t) < x_2(t)$



$$\dot{x}_1(0)=0$$

$$x_1(0)=0$$

「静かにはなす」

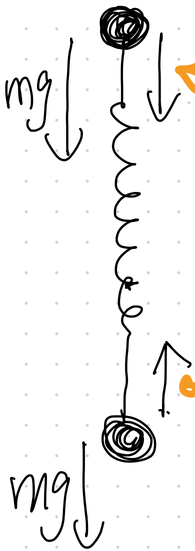
$k\{x_2(0)-l_0\}$

mg

$$x_2(0)=l_0+\frac{mg}{k}$$

$$\dot{x}_2(0)=0$$

運動方程式



$$k\{x_2(t)-x_1(t)-l_0\}$$

$$m\ddot{x}_1(t)=mg+k\{x_2(t)-x_1(t)-l_0\}$$

$$m\ddot{x}_2(t)=mg-k\{x_2(t)-x_1(t)-l_0\}$$

$$x_1(0)=0 \quad x_2(0)=l_0+\frac{mg}{k}$$

$$\dot{x}_1(0)=0 \quad \dot{x}_2(0)=0$$

運動方程式のかきかえ

$$m\ddot{x}_1(t) = mg + k\{x_2(t) - x_1(t) - l_0\}$$
$$m\ddot{x}_2(t) = mg - k\{x_2(t) - x_1(t) - l_0\}$$

$$x_1(0) = 0 \quad x_2(0) = l_0 + \frac{mg}{k}$$
$$\dot{x}_1(0) = 0 \quad \dot{x}_2(0) = 0$$

重心座標 $x_{cm}(t) = \frac{1}{2}\{x_1(t) + x_2(t)\}$

バネののび $y(t) = x_2(t) - x_1(t) - l_0$

$$\ddot{x}_{cm}(t) = g$$
$$\ddot{y}(t) = -\frac{2k}{m}y(t)$$

$$x_{cm}(0) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$
$$y(0) = \frac{mg}{k}$$
$$\dot{x}_{cm}(0) = \dot{y}_{cm}(0) = 0$$

運動方程式の解

$$\ddot{x}_{cm}(t) = g$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2k}{m} y(t)$$

$$x_{cm}(0) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

$$y(0) = \frac{mg}{k}$$

$$\dot{x}_{cm}(0) = \dot{y}_{cm}(0) = 0$$

$$x_{cm}(t) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{g}{2}t^2$$ ← 自由落下

$$y(t) = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$ ← 単振動

運動方程式の解

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{cm}(t) - \dfrac{y(t)}{2} - \dfrac{l_0}{2} \\ x_2(t) = x_{cm}(t) + \dfrac{y(t)}{2} + \dfrac{l_0}{2} \end{cases}$$ より

$$x_{cm}(t) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{g}{2}t^2 \qquad y(t) = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

$$x_1(t) = \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 - \frac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

$$x_2(t) = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

$t \ll \sqrt{\frac{m}{2k}}$ のときの解のふるまい

$\theta \ll 1$ なら

$$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$x_1(t) = \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 - \frac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

$$\simeq \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 - \frac{mg}{2k}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{2k}{m}t^2\right\}$$

$$= \boxed{gt^2}$$

← 加速度 $2g$

$$x_2(t) = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

$$\simeq l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{2k}{m}t^2\right\}$$

$$= \boxed{l_0 + \frac{mg}{k}}$$

← うごかない!!??

$t \ll \sqrt{\frac{m}{2k}}$ のときの解のふるまい

$$\boxed{\theta \ll 1 \text{ なら } \cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24}}$$

$$x_2(t) = l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)$$

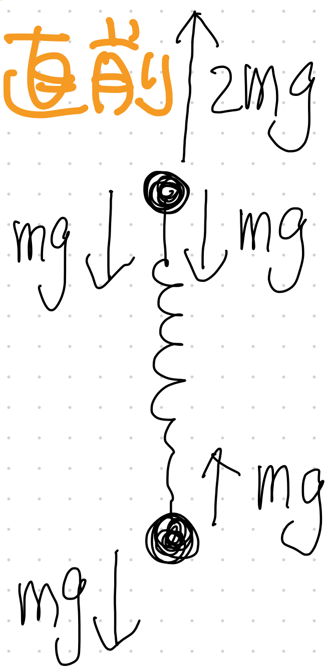
$$\simeq l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{2k}{m}t^2 + \frac{1}{24}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)^4\right\}$$

$$= l_0 + \frac{mg}{k} + \boxed{\frac{g}{12}\frac{k}{m}t^4}$$

← ゆっくりおちる!!

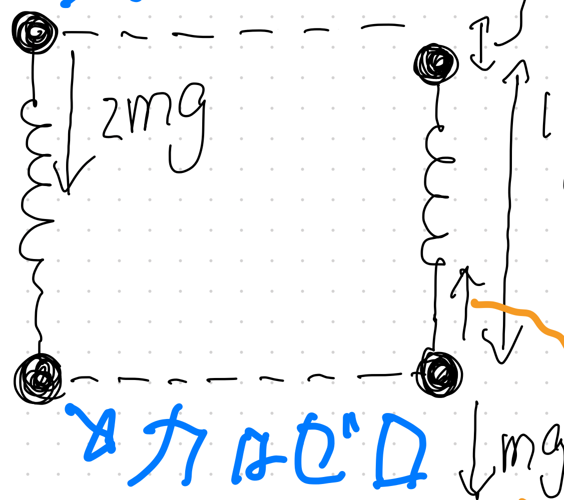
運動方程式をとかずに解のふるまいを見る。

手をはなす直前



手をはなした直後

加速度2g



力はゼロ

加速度ゼロ

少しあと

gt^2

ばねの長さが gt^2 だけちぢむ

$mg - kgt^2$

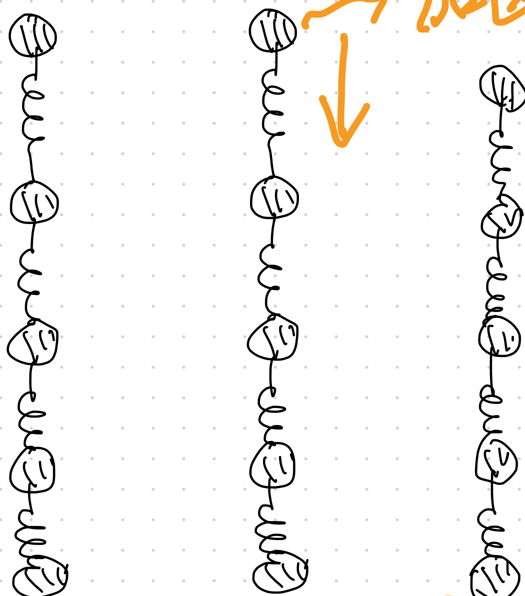
合力 下向きに kgt^2

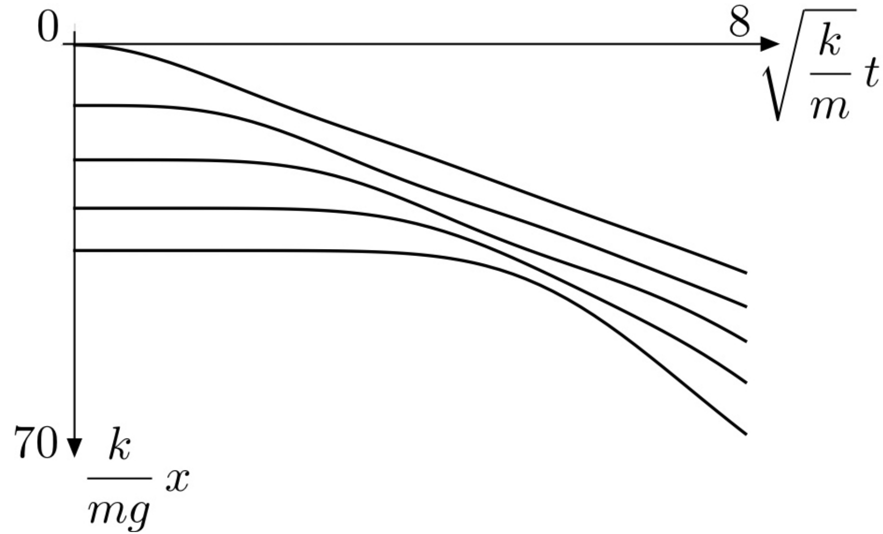
$$\begin{cases} m\ddot{x}_2(t) = kgt^2 \\ \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x_2(t) = x_2(0) + \frac{kg}{12m}t^4}$$

N粒子の場合

加速度 Ng





$$x_N(t) = x_N(0) + Ng\left(\frac{k}{m}\right)^{2(N-1)}\frac{t^{2N}}{(2N)!} + O\left(t^{2(N+1)}\right)$$

参考文献1

slinky fall

11

田崎 晴明『数学：物理を学び楽しむために』

5.3.3節

田崎＋数学

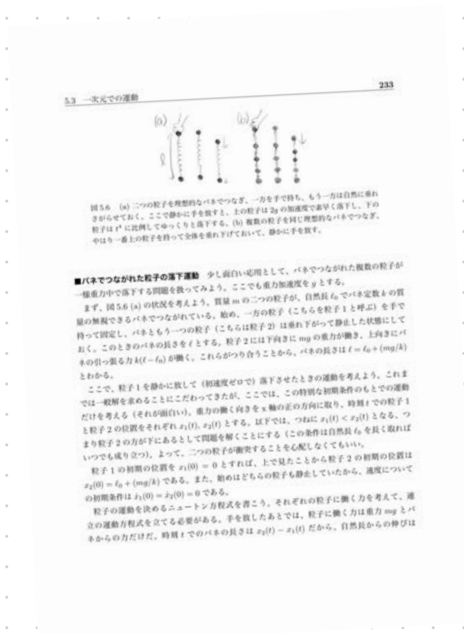


図 5.6 (a) 二つの粒子を理想的なバネでつなぎ、一方を手で持ち、もう一方は自然に垂れさがらせておく。ここで静かに手を放すと、上の粒子は $2g$ の加速度で素早く落下し、下の粒子は t^4 に比例してゆっくりと落下する。(b) 複数の粒子を同じ理想的なバネでつなぎ、やはり一番上の粒子を持って全体を垂れ下げておいて、静かに手を放す。

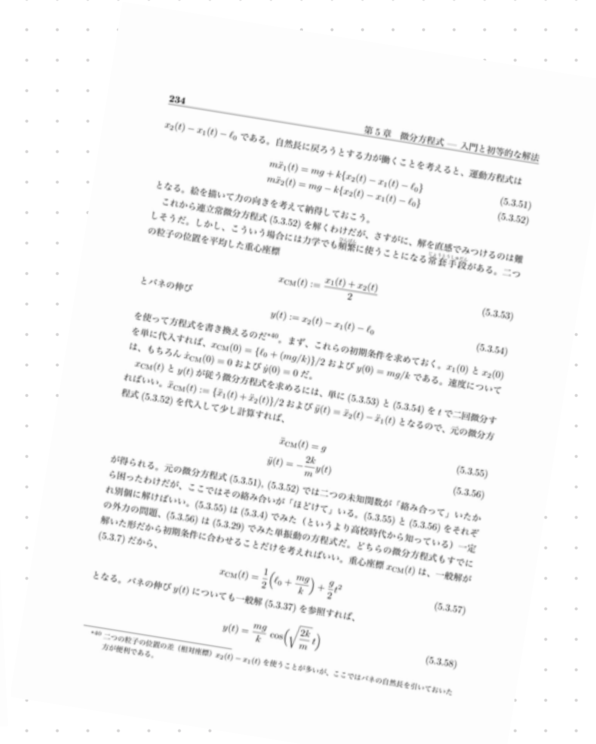
■バネでつながれた粒子の落下運動 少し面白い応用として、バネでつながれた複数の粒子が一様重力中で落下する問題を扱ってみよう。ここでも重力加速度を g とする。

まず、図 5.6 (a) の状況を考えよう。質量 m の二つの粒子が、自然長 ℓ_0 でバネ定数 k の質量の無視できるバネでつながれている。始め、一方の粒子（こちらを粒子 1 と呼ぶ）を手で持って固定し、バネともう一つの粒子（こちらは粒子 2）は垂れ下がって静止した状態にしておく。このときのバネの長さを ℓ とする。粒子 2 には下向きに mg の重力が働き、上向きにバネの引っ張る力 $k(\ell-\ell_0)$ が働く。これらがつり合うことから、バネの長さは $\ell=\ell_0+(mg/k)$ とわかる。

ここで、粒子 1 を静かに放して（初速度ゼロで）落下させたときの運動を考えよう。これまでは一般解を求めることにこだわってきたが、ここでは、この特別な初期条件のもとでの運動だけを考える（それが面白い）。重力の働く向きを x 軸の正の方向に取り、時刻 t での粒子 1 と粒子 2 の位置をそれぞれ $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。以下では、つねに $x_1(t)<x_2(t)$ となる、つまり粒子 2 の方が下にあるとして問題を解くことにする（この条件は自然長 ℓ_0 を長く取ればいつでも成り立つ）。よって、二つの粒子が衝突することを心配しなくてもいい。

粒子 1 の初期の位置を $x_1(0)=0$ とすれば、上で見たことから粒子 2 の初期の位置は $x_2(0)=\ell_0+(mg/k)$ である。また、始めはどちらの粒子も静止していたから、速度についての初期条件は $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ である。

粒子の運動を決めるニュートン方程式を書こう。それぞれの粒子に働く力を考えて、連立の運動方程式を立てる必要がある。手を放したあとでは、粒子に働く力は重力 mg とバネからの力だけだ。時刻 t でのバネの長さは $x_2(t)-x_1(t)$ だから、自然長からの伸びは



$x_2(t)-x_1(t)-\ell_0$ である。自然長に戻ろうとする力が働くことを考えると、運動方程式は

$$m\ddot{x}_1(t)=mg+k\{x_2(t)-x_1(t)-\ell_0\} \tag{5.3.51}$$

$$m\ddot{x}_2(t)=mg-k\{x_2(t)-x_1(t)-\ell_0\} \tag{5.3.52}$$

となる。絵を描いて力の向きを考えて納得しておこう。

これから連立常微分方程式 (5.3.52) を解くわけだが、さすがに、解を直感でみつけるのは難しそうだ。しかし、こういう場合には力学でも頻繁に使うことになる常套手段がある。二つの粒子の位置を平均した重心座標

$$x_{\mathrm{CM}}(t):=\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2} \tag{5.3.53}$$

とバネの伸び

$$y(t):=x_2(t)-x_1(t)-\ell_0 \tag{5.3.54}$$

を使って方程式を書き換えるのだ[*40]。まず、これらの初期条件を求めておく。$x_1(0)$ と $x_2(0)$ を単に代入すれば、$x_{\mathrm{CM}}(0)=\{\ell_0+(mg/k)\}/2$ および $y(0)=mg/k$ である。速度については、もちろん $\dot{x}_{\mathrm{CM}}(0)=0$ および $\dot{y}(0)=0$ だ。

$x_{\mathrm{CM}}(t)$ と $y(t)$ が従う微分方程式を求めるには、単に (5.3.53) と (5.3.54) を t で二回微分すればいい。$\ddot{x}_{\mathrm{CM}}(t):=\{\ddot{x}_1(t)+\ddot{x}_2(t)\}/2$ および $\ddot{y}(t)=\ddot{x}_2(t)-\ddot{x}_1(t)$ となるので、元の微分方程式 (5.3.52) を代入して少し計算すれば、

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}}(t)=g \tag{5.3.55}$$

$$\ddot{y}(t)=-\frac{2k}{m}y(t) \tag{5.3.56}$$

が得られる。元の微分方程式 (5.3.51), (5.3.52) では二つの未知関数が「絡み合って」いたから困ったわけだが、ここではその絡み合いが「ほどけて」いる。(5.3.55) と (5.3.56) をそれぞれ別個に解けばいい。(5.3.55) は (5.3.4) でみた（というより高校時代から知っている）一定の外力の問題、(5.3.56) は (5.3.29) でみた単振動の方程式だ。どちらの微分方程式もすでに解いた形だから初期条件に合わせることだけを考えればいい。重心座標 $x_{\mathrm{CM}}(t)$ は、一般解が (5.3.7) だから、

$$x_{\mathrm{CM}}(t)=\frac{1}{2}\left(\ell_0+\frac{mg}{k}\right)+\frac{g}{2}t^2 \tag{5.3.57}$$

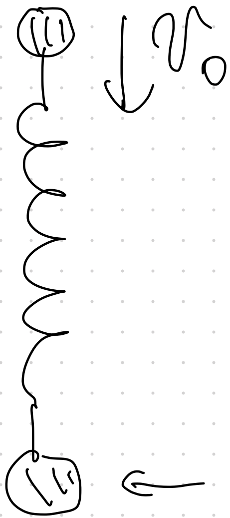
となる。バネの伸び $y(t)$ についても一般解 (5.3.37) を参照すれば、

$$y(t)=\frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right) \tag{5.3.58}$$

[*40] 二つの粒子の位置の差（相対座標）$x_2(t)-x_1(t)$ を使うことが多いが、ここではバネの自然長を引いておいた方が便利である。

課題

$t=0$で初速



$\dot{x}_1(0)=v_0$

$\dot{x}_2(0)=0$