〈スピンについて〉

大きさ$\frac{1}{2}$のスピン角運動量

§1つのスピンの状態

◻ スピン演算子

$\hat{\boldsymbol{S}}=(\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z)$

(1) $[\hat{S}_x,\hat{S}_y]=i\hbar\hat{S}_z,\ \cdots$

行列表示

(2) $\hat{S}_x=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\hat{S}_y=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}$ $\hat{S}_z=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

◻ スピン演算子の固有状態

(3) $\hat{S}_z|\uparrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle$ $\hat{S}_z|\downarrow\rangle=-\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$

(4) $|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

(5) $\hat{S}_x|\rightarrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\rightarrow\rangle$ $\hat{S}_x|\leftarrow\rangle=-\frac{\hbar}{2}|\leftarrow\rangle$

(6) $|\rightarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $|\leftarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

よって

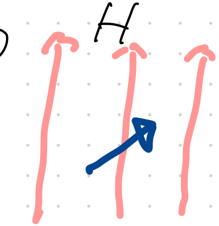
(7) $\begin{cases}|\rightarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle\}\\|\leftarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle-|\downarrow\rangle\}\end{cases}$

(8) $\begin{cases}|\uparrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle+|\leftarrow\rangle\}\\|\downarrow\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle-|\leftarrow\rangle\}\end{cases}$

§磁場中でのスピンの「才差運動」

スピンの磁気モーメント μ_0

$\omega > 0$



x-方向の磁場H中のスピンのハミルトニアン (1) $\hat{H} = -\mu_0 H \hat{S}_x$

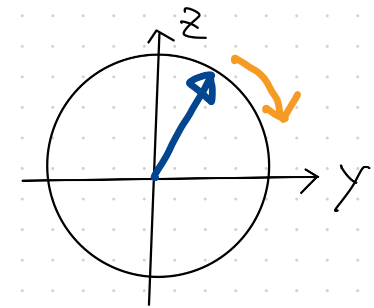
(2) $\hat{H}|\rightarrow\rangle = -\frac{\hbar\omega}{2}|\rightarrow\rangle \qquad \hat{H}|\leftarrow\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}|\leftarrow\rangle$ なので

時間発展のSch.eq.の一般解は

(3) $|\psi(t)\rangle = \alpha e^{i\frac{\omega}{2}t}|\rightarrow\rangle + \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}|\leftarrow\rangle \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\frac{\omega}{2}t} + \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}\right)|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha e^{i\frac{\omega}{2}t} - \beta e^{-i\frac{\omega}{2}t}\right)|\downarrow\rangle$$

簡単な解として $\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とすれば



(4) $|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\omega}{2}t\,|\uparrow\rangle + i\sin\frac{\omega}{2}t\,|\downarrow\rangle$

(5) $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle \Rightarrow |\psi(\frac{\pi}{\omega})\rangle = i|\downarrow\rangle \Rightarrow |\psi(\frac{2\pi}{\omega})\rangle = -|\uparrow\rangle$

(6) $|\psi(\frac{\pi}{2\omega})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ yの正方向

角振動数ωで才差運動

§スピン2つの系の状態

- 4つの直交する状態 (1) $|\uparrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2,\ |\uparrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2,\ |\downarrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2,\ |\downarrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2$

  → $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$と略記

- 一般の状態 (2) $|\Phi\rangle = \alpha_1|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_2|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + \alpha_3|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle + \alpha_4|\downarrow\rangle|\downarrow\rangle$

  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbb{C})$

- singlet　全角運動量が0の特別な状態

(3) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\}$

p1-(7) →

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\{(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle)(|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle) - (|\rightarrow\rangle - |\leftarrow\rangle)(|\rightarrow\rangle + |\leftarrow\rangle)\}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle|\leftarrow\rangle - |\leftarrow\rangle|\rightarrow\rangle\}$$ ← 同じ形