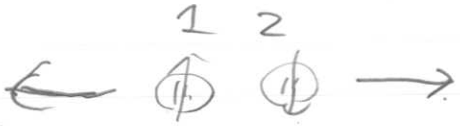
§ エンタングルメントと超光速通信

基本的な例：設定

エンタングルしている

スピン$\frac{1}{2}$をもった2つの(異った粒子) 1, 2

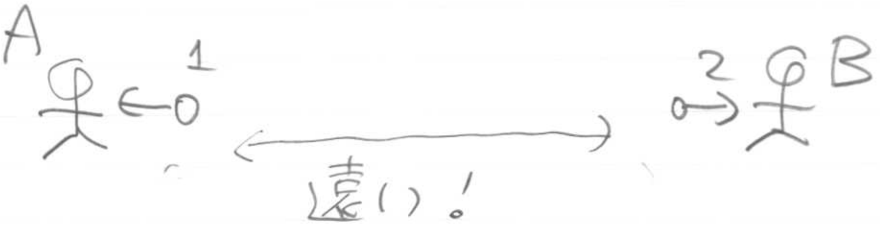


スピン部分は singlet

座標部分

$$\text{全状態} = \underbrace{|\varphi_1\rangle_1}_{\text{左に進む}} \otimes \underbrace{|\varphi_2\rangle_2}_{\text{右に進む}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}}_{= |\Phi_0\rangle} \quad (1.1)$$

AとBがそれぞれ粒子1と粒子2をうけとる



この設定でいくつかの思考実験

(同じ状態をたくさん用意して
実験をくり返すこともできる)

Ⅲ エンタングルした状態の測定

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\Uparrow\rangle_1|\Downarrow\rangle_2 - |\Downarrow\rangle_1|\Uparrow\rangle_2\}$$

・Aが粒子1の $\hat{S}_z$ を測定

$$\begin{cases} \hat{S}_z^{(1)}|\Uparrow\rangle_1|\Downarrow\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|\Uparrow\rangle_1|\Downarrow\rangle_2 \\ \hat{S}_z^{(1)}|\Downarrow\rangle_1|\Uparrow\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|\Downarrow\rangle_1|\Uparrow\rangle_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

より

	測定結果		測定後の状態
確率 $\frac{1}{2}$ で	$\uparrow\ (\frac{\hbar}{2})$	$\longrightarrow$	$\lvert\Uparrow\rangle_1\lvert\Downarrow\rangle_2$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\downarrow\ (-\frac{\hbar}{2})$	$\longrightarrow$	$\lvert\Downarrow\rangle_1\lvert\Uparrow\rangle_2$

(2.2)

・ここでBが粒子2の $\hat{S}_z$ を測ると、その結果は確定している。

Q1: Aが測定した瞬間にBの手元の状態が変化するのか？

相対論に反する？
→ どの座標系で？

⋮

これは「よい問い」ではない → 状態の定義などに依存

$$\boxed{\text{Q2: Aが測定したことによってAからBに情報が伝わるのか？}}$$

← 超光速通信??

・Bが粒子2の$\hat{S}_z$を測定する。

(1) Aの測定のあと

	Aの測定結果	Aの測定後	Bの測定結果
確率$\frac{1}{2}$で	↑	$\lvert\uparrow\rangle_1 \lvert\downarrow\rangle_2$	↓
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	↓	$\lvert\downarrow\rangle_1 \lvert\uparrow\rangle_2$	↑

(2.3)

(2) Aの測定の前

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$

	Bの測定結果
確率$\frac{1}{2}$で	↓
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	↑

(2.4)

$\boxed{\text{Bにとっては (2.3) も (2.4) も変わらない}}$

・Aが粒子1の$\hat{S}_z$を、Bが粒子2の$\hat{S}_z$を測定

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$

確率$\frac{1}{2}$で　Aは↑　Bは↓
〃 $\frac{1}{2}$で　Aは↓　Bは↑

1回の実験ならこのどちらか。くり返せば両者がほぼ半分ずつ

・どちらが先に測定しても同じ

・AとBの測定結果に相関はあるが情報は伝わっていない!

四 測定する物理量を変える「通信」

$\hat{S}_x$ の固有状態
$$\begin{cases} |\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\} \\ |\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\} \end{cases} \quad (4-1)$$

$$\hat{S}_x|\rightarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\rightarrow\rangle, \quad \hat{S}_x|\leftarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\leftarrow\rangle \quad (4-2)$$

これをつかうと

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\} \quad (4-3)$$

よって $|\Phi_0\rangle$ で A が $\hat{S}_x$ を測定すると

	測定結果	測定後の状態
確率 $\frac{1}{2}$ で	$\rightarrow$ $(\frac{\hbar}{2})$	$|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\leftarrow$ $(-\frac{\hbar}{2})$	$|\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2$

(4-4)

- これを利用して、A から B へ 1 bit の情報を一瞬で伝える
  - → yes or no

		B の状態
yes → A は $\hat{S}_z$ を測定	$\longrightarrow$	$|\uparrow\rangle_2$ or $|\downarrow\rangle_2$
no → A は $\hat{S}_x$ 〃	$\longrightarrow$	$|\rightarrow\rangle_2$ or $|\leftarrow\rangle_2$

(4-5)

これを区別すれば、B は yes/no がわかる！ 超光速通信!!

・Bが粒子2の$\hat{S}_z$を測ると…

yesのとき　　　　　　　　Bのけっか

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\uparrow\rangle_2$ ⟶ ↑

〃　$\frac{1}{2}$　$|\downarrow\rangle_2$ ⟶ ↓　　(5-1)

noとのとき　　　　　　　　Bのけっか

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\rightarrow\rangle_2$ → かくりつ$\frac{1}{4}$ … ↑

　　　　　　　　　　　→ 〃 $\frac{1}{4}$ … ↓　　(5-2)

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\leftarrow\rangle_2$ → かくりつ$\frac{1}{4}$ … ↑

　　　　　　　　　　　→ 〃 $\frac{1}{4}$ … ↓

けっきょく、どちらでも　かくりつ$\frac{1}{2}$ ↑　　(5-3)

　　　　　　　　　　　〃 $\frac{1}{2}$ ↓

この測定では区別できない…（→ 他のものを測ったら…（あとで））

もしBが測定前の状態をそのままコピーできれば…

yes → $|\uparrow\rangle_2$ → $|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle \cdots |\uparrow\rangle$ → $\hat{S}_z$を次々と測定すると いつも↑

no → $|\rightarrow\rangle_2$ → $|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle \cdots |\rightarrow\rangle$ → $\hat{S}_z$を次々と測定すると↑か↓がランダムに。

区別ができる！

しかし　このような量子状態のコピーは不可能

クローン禁止定理

▷ 一般的な設定と結果

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の任意の状態 $|\Phi_0\rangle$

Aが扱える

Bが扱える

エンタングルした粒子のペアたち

様々なしかけ

⋮

- 状態 $|\Phi_0\rangle$
- Aは $\mathcal{H}_1$ 上の物理量 $\hat{A}$ を測定
- Bは $\mathcal{H}_2$ 〃 $\hat{B}$ を測定

→ これを何度もくり返す

> <u>結果</u> 任意の $\hat{B}$ について、Bの測定結果の期待値 $\langle \hat{B} \rangle$ は $\hat{A}$ に依存しない

先ほどの結果の一般化

規格化されている

縮退なし

証明 $\hat{A}$の固有状態 $\hat{A}|\Phi_j\rangle_1 = a_j|\Phi_j\rangle_1$ (7.1)

$$\hat{P}_j = |\Phi_j\rangle_1 {}_1\langle\Phi_j| \ , \ \tilde{P}_j = \hat{P}_j \otimes \hat{1}_2 \quad (7.2)$$

きかくかされている

$|\Phi_0\rangle$で $\hat{A}\otimes\hat{1}_2$ を測定して a_j が得られる確率

$$P_j = \| \tilde{P}_j |\Phi_0\rangle \|^2 = \langle\Phi_0|\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle \quad (7.3)$$

a_j が得られたあとの状態

$$|\Phi_j\rangle = \frac{\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle}{\|\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle\|} = \frac{\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle}{\sqrt{P_j}} \quad (7.4)$$

(状態 $|\Phi_j\rangle$ で $\hat{1}_1\otimes\hat{B} = \tilde{B}$ を測定した期待値
$\langle\Phi_j|\tilde{B}|\Phi_j\rangle$)

よって B の測定の期待値

$$\langle\hat{B}\rangle = \sum_j P_j \langle\Phi_j|\tilde{B}|\Phi_j\rangle = \sum_j \langle\Phi_0|P_j \tilde{B} P_j|\Phi_0\rangle$$

$$= \sum_j \langle\Phi_0|\tilde{P}_j \tilde{B}|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\tilde{B}|\Phi_0\rangle$$

$$= \langle\Phi_0|(\hat{1}_1\otimes\hat{B})|\Phi_0\rangle \quad (7.5)$$

← $\hat{A}$によらない!

//

- ほとんど同じ議論で もっと強そうな結果もいえる.

課題

- $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ の任意の状態 $|\Psi_0\rangle$

任意

- ユニタリー演算子 $\hat{U}_1 \otimes \hat{U}_2$ を作用
- A は $\hat{A} \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ を測定

任意

- ユニタリー演算子 $\hat{U}_1' \otimes \hat{U}_2'$ を作用
- B は $\hat{\mathbb{1}}_1 \otimes \hat{B}$ を測定

$\Downarrow$

結果

B の測定の期待値は, $\hat{U}_1$, $\hat{A}$, $\hat{U}_1'$ によらない

エンタングルメントがあっても

A から B への超光速通信はできない.

量子論の根本的な性質