§ バネでつながれた粒子の落下運動

（本 §5.3.3 p239 p477 L p649 LL）

(i) 動機

slinky fall

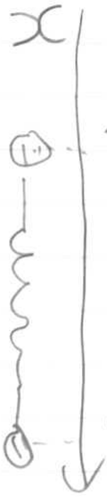
(ii) もっとも簡単なモデル

(1) ← 質量 m の粒子

理想的なバネ
- 質量ゼロ
- バネ定数 k
- 自然長 l_0

重力 ↓ g

座標



x

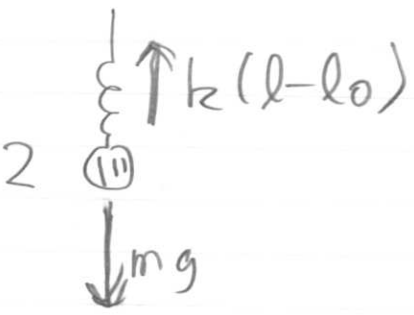
$x_1(t)$ 時刻 t での粒子1の位置

$x_2(t)$ 時刻 t 〃 2 〃

$$x_1(t) < x_2(t)$$

ぶつからない

(III) 初期状態



つりあい:

$$mg = k(l - l_0) \quad ①$$

$$l = l_0 + \frac{mg}{k} \quad ②$$

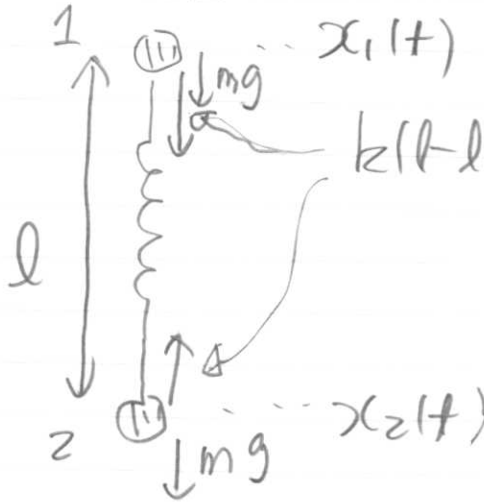
$$\boxed{\begin{array}{ll} x_1(0)=0, & x_2(0) = l_0 + \dfrac{mg}{k} \\ \dot{x}_1(0)=0, & \dot{x}_2(0)=0 \end{array}} \quad ③$$

$t=0$で静かに手を放し，粒子+バネを落下させる.

（注　$\dot{x}_1(t)$ は $\dfrac{dx_1(t)}{dt}$ のこと
　　　$\ddot{x}_1(t)$ は $\dfrac{d^2x_1(t)}{dt^2}$ のこと.）

(iii) 運動方程式

時刻 t 　　$l = x_2(t) - x_1(t)$ ④



$k(l - l_0) = k\{x_2(t) - x_1(t) - l_0\}$ ⑤

Newton 方程式

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= mg + k\{x_2(t) - x_1(t) - l_0\} \quad ⑥ \\ m\ddot{x}_2(t) &= mg - k\{x_2(t) - x_1(t) - l_0\} \quad ⑦ \end{aligned}}$$

これを初期条件が③のときにとこう！

重心座標 　center of mass.

$$x_{cm}(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} \quad ⑧$$

バネののび

$$y(t) = x_2(t) - x_1(t) - l_0 \quad ⑨$$

を使う.

⑥, ⑦ ~~は~~ は

$$\boxed{\ddot{x}_{cm}(t) = g \quad ⑩, \qquad \ddot{y}(t) = -\frac{2k}{m} y(t) \quad ⑪}$$

③ は

$$\left.\begin{aligned} x_{cm}(0) &= \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right), & \dot{x}_{cm}(0) &= 0 \\ y(0) &= \frac{mg}{k}, & \dot{y}(0) &= 0 \end{aligned}\right\} ⑫$$

(ii) 解を求める.

⑩の一般解 $x_{cm}(t) = A + Bt + \frac{g}{2}t^2$ ⑬

にんい
てーすー

⑪の一般解 $y(t) = C\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t + \theta\right)$ ⑭

⑫に あわせると

$$\begin{cases} x_{cm}(t) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \frac{mg}{k}\right) + \frac{g}{2}t^2 & ⑮ \\ y(t) = \frac{mg}{k}\cos\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right) & ⑯ \end{cases}$$

⑧, ⑨を逆にとけば

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{cm}(t) - \dfrac{y(t)}{2} - \dfrac{l_0}{2} & (17) \\ x_2(t) = x_{cm}(t) + \dfrac{y(t)}{2} + \dfrac{l_0}{2} & (18) \end{cases}$$

⑮, ⑯を代入すると.

$$\begin{cases} x_1(t) = \dfrac{mg}{2k} + \dfrac{g}{2}t^2 - \dfrac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\,t\right) & (19) \\ x_2(t) = l_0 + \dfrac{mg}{2k} + \dfrac{g}{2}t^2 + \dfrac{mg}{2k}\cos\left(\sqrt{\dfrac{2k}{m}}\,t\right) & (20) \end{cases}$$

完全にとけた!

(iii) tが小さいときの解のふるまい

$\theta \ll 1$ なら $\cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2}$ (21)　≒と同じ

$t \ll \sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ として (19), (20) のふるまいをみよう.

(19) より

$$x_1(t) \simeq \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 - \frac{mg}{2k}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)^2\right\} \quad (22)$$

きえる　$\dfrac{g}{2}t^2$

$$= gt^2$$ ← 加速度 $2g$でおちる!

(20) より

$$x_2(t) \simeq l_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\right)^2\right\} \quad (23)$$

$$= l_0 + \frac{mg}{k}$$ ← うごかない!???

$\cos\theta \simeq 1 - \dfrac{\theta^2}{2} + \dfrac{\theta^4}{24}$ をつかえば

$$x_2(t) \simeq l_0 + \frac{mg}{k} + \frac{g}{12}\frac{k}{m}t^4 \quad (24)$$

ものすごくゆっくり落ちる!!!

(iii) 計算しないでこの結果を出す.

t<0での力

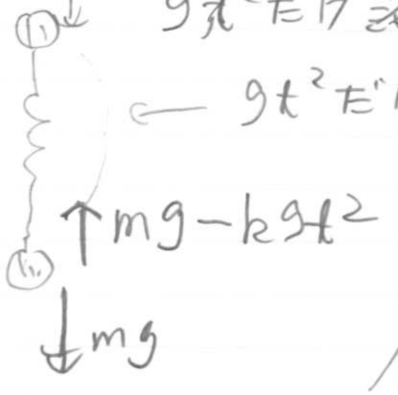
t=0での力

← 2mgの力 ⇒ 加速度 2g

$x_1(t) \simeq gt^2$

ゼロ → うごかない?

すこしあと



gt^2だけ移動

← gt^2だけちぢむ

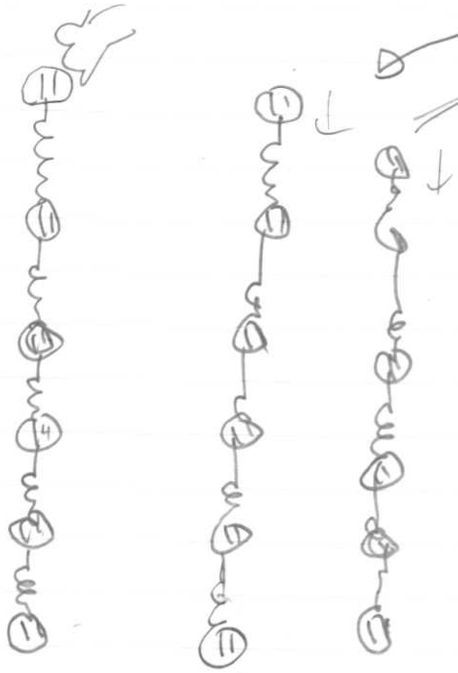
合力下向きに kgt^2

$$m\ddot{x}_2(t) \simeq kgt^2$$

$$x_2(t) \simeq x_2(0) + \frac{kg}{12m}t^4 + O(t^6)$$

N粒子への拡張

加速度 Ng



$$x_N(t) \fallingdotseq x_N(0) + Ng\left(\frac{k}{m}\right)^{2(N-1)} \frac{t^{2N}}{(2N)!} + O\left(t^{2(N+1)}\right)$$

$N \uparrow \infty$で「slinky問題」がわかる？

課題